M 110

MINISTERE DE L'EQUIPEMENT
ET
DE L'AMENAGEMENT DU TERRITOIRE

E.I. T.P.E. 1978

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(temps accordé : 3 heures)

1

Dans tout le problème

- R[X] est l'algèbre des polynômes à une indéterminée à coefficients dans R.
- Un polynôme de R[X] est dit normé si son coefficient de plus haut degré est égal à 1.

I - 1°) Soit $A_n(\theta)$ la matrice symétrique $n \times n$ dont les coefficients $a_{i,j}$ sont définis comme suit :

$$a_{1,1} = \cos\theta \quad \text{et} \quad \forall i > 1 \quad a_{i,i} = 2\cos\theta$$

$$\forall i \geqslant 1 \quad a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1 \quad \text{et} \quad \forall j / j \neq i,\ j \neq i+1 \text{ et } j \neq i-1 \quad a_{i,j} = a_{j,i} = 0$$

c'est-à-dire

$$A_n(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{bmatrix}$$

Exprimer le déterminant de $A_n(\theta)$ en fonction d'une ligne trigonométrique simple de θ.

2°) Soient les polynômes de $\mathbb{R}[X]$: P_n tels que

$x \in [-1, +1] \longrightarrow P_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

Montrer que P_n est de degré n. Donner son coefficient de plus haut degré ; étudier sa parité, ses zéros, l'image réciproque de ses minimums et maximums dans le segment $[-1, +1]$.
Calculer $P_n(1)$, $P_n(-1)$, $P_n(0)$.

3°) Expliciter P_1 P_2 P_3 et tracer leur graphe dans $[-1, +1]$.

4°) Ecrire la formule donnant P_n à partir de P_{n-1} et P_{n-2}.

5°) Exprimer $P_n(x)$ lorsque $x \in [1, +\infty[$ et $]-\infty, -1]$, à l'aide d'une formule voisine de celle définissant $P_n(x)$ pour $x \in [-1, +1]$.

.../...

II - Soit l'équation différentielle du deuxième ordre

$$(1 - x^2)\, y'' - x\, y' + \lambda\, y = 0 \qquad (E)$$

1°) Montrer que pour tout n, il existe une valeur λ_n de λ telle que (E) admette pour solution un polynôme de degré n.
Pour tout n, on note Q_n le polynôme normé de degré n, solution de (E).

2°) Montrer que pour $x \in]-1, +1[$ (E) peut se mettre sous la forme

$$\left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\, y'\right]' + \frac{\lambda}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\, y = 0$$

3°) Justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{Q_n(x)\ \ Q_m(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$$, et donner sa valeur lorsque $n \neq m$.

4°) Dans $[R(X)]^2$ montrer que l'application

$$(P, Q) \longrightarrow \int_{-1}^{+1} \frac{P(x)\ \ Q(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \qquad \text{avec} \quad P \in R[X] \quad \text{et} \quad Q \in R[X]$$

est une forme bilinéaire symétrique "définie positive", notée $\langle\ ,\ \rangle$

5°) Calculer $\langle P_n\ ,\ P_m \rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(x)\ \ P_m(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

en déduire que $2^{n-1}\, Q_n = P_n$ et donner une base de polynômes orthonormée pour $\langle\ ,\ \rangle$

6°) Donner la solution générale de l'équation différentielle (E) pour $\lambda = \lambda_n$.
Il est recommandé de faire un changement de variable tenant compte de la solution $y = P_n$.

III - 1°) Soit $z \in \mathbb{C}$
Montrer que $\sum_0^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}$ pour $|z| < 1$.

2°) En posant $z = te^{i\theta}$, montrer que $P_n(x)$ est "engendrée" par la fonction $g(x,t) = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2}$, c'est-à-dire que $g(x,t) = \sum_0^{\infty} P_n(x)\, t^n$.

3°) De quelle fonction $R_n(x)$ la fonction $h(x,t) = \frac{t\sqrt{1 - x^2}}{1 - 2tx + t^2}$ est-elle génératrice ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail